PETRU ROTARU

DETERMINANŢI MICŞTI

Probleme de matematica pentru liceu

Ediţia a II-a

Editura TAIDA
– IAŞI, 2020 –

Motivaţia

Sunt câteva fapte care motivează conţinutul acestei lucrări. Le vom evidenţia în cele ce urmează.

① Formulă pentru $\det(A+B)$

Mulţimea de matrice $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $(n \geq 2)$ împreună cu adunarea şi înmulţirea de matrice, respectiv înmulţirea cu scalari este o $\mathbb{C}$-algebră.

Se cunosc următoarele proprietăţi ale determinanţilor:

1) $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$ (A din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi α din $\mathbb{C}$);

2) $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ (A şi B din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) – formula lui Cauchy-Binet.

Fie $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ matrice din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi fie $\mathrm{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$

Pentru un k din N avem:

$$(*)\ \prod_{j \in \mathrm{N}} (a_{jk} + b_{jk}) = \sum_{J \subseteq \mathrm{N}} \prod_{j \in J} a_{jk} \cdot \prod_{j \in \mathrm{N}-J} b_{jk},\ \text{cu}\ \prod_{j \in \varnothing} a_{jk} = 1 = \prod_{j \in \varnothing} b_{jk}$$

Acum

$$\det(A+B) = \sum_{p \in S_n} \varepsilon(p) \cdot \prod_{j \in \mathrm{N}} (a_{jp(j)} + b_{jp(j)}) \overset{(*)}{=} \sum_{J \subseteq \mathrm{N}} \sum_{p \in S_n} \varepsilon(p) \cdot \prod_{j \in J} a_{jp(j)} \cdot \prod_{j \in \mathrm{N}-J} b_{jp(j)}$$

(am permutat sumele) $= \sum_{j \subseteq \mathrm{N}} \det \begin{pmatrix} A/J \\ \ldots\ldots.. \\ B/\mathrm{N}-J \end{pmatrix}$ (sumă de 2^n determinanţi), unde

$\begin{pmatrix} A/J \\ \ldots\ldots.. \\ B/\mathrm{N}-J \end{pmatrix}$ este matricea ce conţine liniile $(a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jn})$ din A $(j \in J)$ şi liniile $(b_{k1}, b_{k2}, \ldots, b_{kn})$ din B $(k \in \mathrm{N}-J)$.

Pentru $n = 2$ avem:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

Determinanţi micşti

Considerăm matricele $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ cu elemente din mulţimea $\mathbb{C}$ şi în legătură cu aceste două matrice, luăm matricele $A/B=\begin{pmatrix} a & b \\ z & t \end{pmatrix}$ şi $B/A=\begin{pmatrix} x & y \\ c & d \end{pmatrix}$ pe care le numim **matrice mixte** şi le citim: „matricea A şi B", respectiv „matricea B şi A" (sau „matricea A pe B", respectiv „matricea B pe A") iar determinanţii acestor matrice îi numim **determinanţi micşti. Proprietăţile numărului** $\underline{(\det A/B+\det B/A)}$ (o sumă de doi determinanţi micşti) vor fi puse în evidenţă în continuare de următoarea

Propoziţie. Au loc următoarele relaţii:

$\boxed{1}$ $\det(A+B)=\det A+\det B+(\det A/B+\det B/A)$, $\forall A,B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

$\boxed{2}$ $\det(\alpha\cdot A+\beta\cdot B)=\alpha^2\det A+\beta^2\det B+\alpha\beta(\det A/B+\det B/A)$, $\forall A,B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{C}$

Demonstraţie:

Într-adevăr, folosind proprietăţi ale determinanţilor, avem:

$$\det(A+B)=\begin{vmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+t \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c+z & d+t \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & y \\ c+z & d+t \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & b \\ z & t \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} x & y \\ c & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & y \\ z & t \end{vmatrix}=\det A+\det B+(\det A/B+\det B/A).$$

Acum vom demonstra şi $\boxed{2}$. Avem, conform $\boxed{1}$:

$$\det(\alpha A+\beta B)=\det(\alpha A)+\det(\beta B)+(\det \alpha A/\beta B+\det \beta B/\alpha A),$$ dar

$$(\det \alpha A/\beta B+\det \beta B/\alpha A)=\begin{vmatrix}\alpha a & \alpha b\\ \beta z & \beta t\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\beta x & \beta y\\ \alpha c & \alpha d\end{vmatrix}=\alpha\beta\begin{vmatrix}a & b\\ z & t\end{vmatrix}+\alpha\beta\begin{vmatrix}x & y\\ c & d\end{vmatrix}$$ şi

atunci obţinem:

$$\det(\alpha A+\beta B)=\alpha^2\det A+\beta^2\det B+\alpha\beta(\det A/B+\det B/A),$$ adică $\boxed{2}$.

Observaţie:

Considerăm în continuare că sunt cunoscute proprietăţile determinaţilor.

În formula $\boxed{2}$ particularizăm $\alpha=1$, $\beta=-1$ şi obţinem:

$\boxed{3}$ $\det(A-B)=\det A+\det B-(\det A/B+\det B/A)$, $\forall A,B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$;

din identităţile $\boxed{1}$ şi $\boxed{3}$ rezultă imediat că:

$\boxed{4}$ $\det(A+B)+\det(A-B)=2(\det A+\det B)$, $\forall A,B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, dar

şi:

$\boxed{5}$ $\det(A+B)-\det(A-B)=2(\det A/B+\det B/A)$, $\forall A,B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Observaţie:

Identităţile $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ şi $\boxed{5}$ pot fi considerate ca formule care oferă expresii pentru $(\det A/B+\det B/A)$.

În calculul expresiei $(\det A/B+\det B/A)$ particularizăm matricea B: luăm $B=I_2$, apoi: $B=A$, respectiv $B=O_2$, şi obţinem succesiv:

$\boxed{6}$ $\det A/I_2+\det I_2/A=trA$; $\det A/A+\det A/A=2\det A$;

$\det A/O_2+\det O_2/A=0$ unde $trA=a+d$ (urma matricei A), proprietăţile urmei le considerăm cunoscute.

Demonstraţia formulelor din $\boxed{6}$ este imediată. Considerăm acum şi:

$\boxed{7}$ $\det \alpha A/\beta B+\det \beta B/\alpha A=\alpha\beta(\det A/B+\det B/A)$, $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{C}$ şi $A,B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

Probleme

P.1. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Demonstraţi că:
$\det(A+B)=\det A+\det B \Leftrightarrow \det(A-B)=\det A+\det B$

Petru Rotaru

P.2. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Demonstraţi că:
$\det(A+B)=\det A+\det B \Leftrightarrow \det(A+B)=\det(A-B)$

Petru Rotaru

P.3. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ şi $\det A+\det B=0$. Demonstraţi că:
$\det(A+B)+\det(A-B)=0$. Reciproca este adevărată?

Petru Rotaru

P.4. Dacă $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, atunci: $\det(A^2+B^2)\geq \det(AB-BA)$

C:2748, G.M.

P.5. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Demonstraţi că:
$\det(A^2+B^2)/(AB-BA)+\det(AB-BA)/(A^2+B^2)=0$

Petru Rotaru

P.6. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Demonstraţi că:
$\det(A^2+B^2)-\det(AB-BA)=(\det A-\det B)^2+(\det A/B+\det B/A)^2$

Petru Rotaru

P.7. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, cu $AB=BA$. Demonstraţi că:
$\det(A^2-B^2)=(\det A+\det B)^2-(\det A/B+\det B/A)^2$

Petru Rotaru

P.8. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, cu $AB=BA$. Demonstraţi că:
$\det(A^2-B^2)\leq(\det A+\det B)^2$

Petru Rotaru

P.303. Aplicând lema celor două polinoame, polinoamelor $f = x^2 + x + 1$ şi $g = z^n - 1$, $n \in \mathbb{N}^*$, demonstraţi că:

$$\left(1+2\cos\frac{2\pi}{n}\right)\left(1+2\cos\frac{4\pi}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+2\cos\frac{(2n-2)\pi}{n}\right)=$$

$$=\begin{cases} 0, & n = 3\ell \\ (-1)^{n+1}, & n = 3\ell \pm 1, \quad \ell \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Petru Rotaru

P.304. Fie $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ trei matrice cu proprietatea $\det C \neq 0$. Folosind identităţile: $(A+B)C = AC + BC$; $(A-B)C = AC - BC$; $(A+iB)C = AC + iBC$ şi $(A-iB)C = AC - iBC$, $i^2 = -1$, în care se trece la determinanţi, demonstraţi că: $\mathrm{d}\,\underset{n-k}{A}C\underset{k}{B}C = (\det C)\cdot \mathrm{d}\,\underset{n-k}{A}\,\underset{k}{B}$ oricare ar fi n şi k numere naturale cu proprietăţile: $7 \geq n \geq 2$ şi $0 < k < n$

Petru Rotaru

P.305. Dacă $A, B, C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, atunci:

$$\mathrm{d}\,\underset{2}{A+B}\,\underset{1}{C} = \mathrm{d}\,\underset{2}{A}\,\underset{1}{C} + \mathrm{d}\,\underset{2}{B}\,\underset{1}{C} + \mathrm{d}\,\underset{1}{A}\,\underset{1}{B}\,\underset{1}{C}$$

Petru Rotaru

P.306. Dacă $A, B, C \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$, atunci:

a) $\mathrm{d}\,\underset{3}{A+B}\,\underset{1}{C} = \mathrm{d}\,\underset{3}{A}\,\underset{1}{C} + \mathrm{d}\,\underset{3}{B}\,\underset{1}{C} + \mathrm{d}\,\underset{2}{A}\,\underset{1}{B}\,\underset{1}{C} + \mathrm{d}\,\underset{1}{A}\,\underset{2}{B}\,\underset{1}{C}$

b) $\mathrm{d}\,\underset{2}{A+B}\,\underset{2}{C} = \mathrm{d}\,\underset{2}{A}\,\underset{2}{C} + \mathrm{d}\,\underset{2}{B}\,\underset{2}{C} + \mathrm{d}\,\underset{1}{A}\,\underset{1}{B}\,\underset{2}{C}$

c) $\mathrm{d}\,\underset{1}{A+B}\,\underset{3}{C} = \mathrm{d}\,\underset{1}{A}\,\underset{3}{C} + \mathrm{d}\,\underset{1}{B}\,\underset{3}{C}$

Petru Rotaru

Soluţii

P.1. Folosind $\boxed{1}$, relaţia: $\det(A+B)=\det A+\det B$ este echivalentă cu: $\det A+\det B+(\det A/B+\det B/A)=\det A+\det B$ sau cu: $\det A/B+$ $+\det B/A=0$, care, prin intermediul formulei $\boxed{3}$ este echivalentă cu: $\det(A-B)=\det A+\det B$.

P.2. Folosind $\boxed{1}$, relaţia: $\det(A+B)=\det A+\det B$ este echivalentă cu: $\det A+\det B+(\det A/B+\det B/A)=\det A+\det B$ sau cu: $\det A/B+$ $+\det B/A=0$ care, prin intermediul formulei $\boxed{5}$ este echivalentă cu: $\det(A+B)=\det(A-B)$.

P.3. Din $\boxed{1}$ avem $\det A/B+\det B/A=\det(A+B)-\det A-\det B$, din $\boxed{3}$ avem $\det A/B+\det B/A=\det A+\det B-\det(A-B)$, de unde rezultă că $\det(A+B)-\det A-\det B=\det A+\det B-\det(A-B)$ şi ţinând cont de ipoteză, obţinem $\det(A+B)=-\det(A-B)$. Este evident că are loc şi reciproca.

Observaţie: P.3. se poate enunţa şi astfel: „Se dau matricele $A,B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ unde matricea B este matricea A în care s-au schimbat două linii (coloane) între ele. Demonstraţi că: $\det(A+B)+\det(A-B)=0$”.

P.4. Avem identitatea: $(A-iB)(A+iB)=A^2+B^2+i(AB-BA)$, trecând aici la determinaţi, obţinem: $\det(A-iB)\cdot\det(A+iB)=\det(A^2+B^2+$ $+i(AB-BA))$ şi acum, folosim $\boxed{2}$, rezultă: $\left[\det A+i^2\det B-i(\det A/B+\right.$ $\left.+\det\ B/A)\right]\left[\det A+i^2\det B+i(\det A/B+\det B/A)\right]=\det(A^2+B^2)+$ $+i^2\cdot\det(AB-BA)+i(\det(A^2+B^2)/(AB-BA)+\det(AB-BA)/(A^2+B^2))$ sau: $(\det A-\det B)^2+(\det A/B+\det B/A)^2=\det(A^2+B^2)-\det(AB-BA)+$ $+i(\det(A^2+B^2)/(AB-BA)+\det(AB-BA)/(A^2+B^2))$, cum $A,B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$1+z_k^2=1+\cos^2\frac{(2k+1)\pi}{n}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}=2\cos^2\frac{(2k+1)\pi}{n}+$$

$$+2i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}=2\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}\left[\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}+\right.$$

$$\left.+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}\right]$$ şi atunci: produsul din stânga, pentru (1), devine:

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(1+z_k^2\right)=2^n\cos\frac{\pi}{n}\cos\frac{3\pi}{n}\cos\frac{5\pi}{n}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{(2n-1)\pi}{n}\cdot$$

$$\cdot\left[\cos\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)\pi}{n}\right]=$$

$$=2^n\cos\frac{\pi}{n}\cos\frac{3\pi}{n}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{(2n-1)\pi}{n}\left[\cos n\pi+i\sin n\pi\right]$$, adică am găsit:

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(1+z_k^2\right)=2^n\cos\frac{\pi}{n}\cos\frac{3\pi}{n}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{(2n-1)\pi}{n}\cdot\cos n\pi \quad (2).$$

Acum:

$$\prod_{h=1}^{2}\left((x_h)^n+1\right)=\left[(i)^n+1\right]\left[(-i)^n+1\right]=1^n+i^n+(-i)^n+1=\begin{cases}4,\ n=4\ell\\ 2,\ n=4\ell\pm1\\ 0,\ n=4\ell=2\end{cases},$$

$\ell\in\mathbb{N}^*$. Venind cu ultimul rezultat şi cu (2) în (1), obţinem identitatea dorită.

P.303. Polinomul $f=X^2+X+1$ are rădăcinile $x_1=\varepsilon$ şi $x_2=\overline{\varepsilon}$ cu $x_1+x_2=-1$ şi $x_1x_2=1$ şi $x_1^3=x_2^3=1$, iar polinomul $g=Z^n-1$ are $z_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$, $k=\overline{0,n-1}$, atunci din lemă:

$$\prod_{k=0}^{n-1}f(z_k)=(-1)^{2n}\prod_{h=1}^{2}g(x_h)$$, adică $$\prod_{k=0}^{n-1}\left(z_k^2+z_k+1\right)=\prod_{h=1}^{2}\left[(x_h)^n-1\right] \quad (1).$$

Pentru (1) calculăm, pe rând, cele două produse:

$$1+z_k+z_k^2=1+\cos\frac{4k\pi}{n}+i\sin\frac{4k\pi}{n}+\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}=2\cos^2\frac{2k\pi}{n}+$$

$$+\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}=\cos\frac{2k\pi}{n}\left(2\cos\frac{2k\pi}{n}+1\right)+$$

$+i\sin\frac{2k\pi}{n}\left(2\cos\frac{2k\pi}{n}+1\right)=\left(2\cos\frac{2k\pi}{n}+1\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)=$

$=\left(1+2\cos\frac{2k\pi}{n}\right)z_k$ şi atunci produsul din stânga, pentru (1), devine:

$\prod_{k=0}^{n-1}\left(z_k^2+z_k+1\right)=\prod_{k=0}^{n-1}\left(1+2\cos\frac{2k\pi}{n}\right)\cdot z_k=(-1)^{n+1}\prod_{k=0}^{n-1}\left(1+2\cos\frac{2k\pi}{n}\right)$, adică

am găsit: $(-1)^{n+1}\left(1+2\cos\frac{2\pi}{n}\right)\left(1+2\cos\frac{4\pi}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+2\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)=$

$=\prod_{k=0}^{n-1}\left(z_k^2+z_k+1\right)$ (2).

Acum: $\prod_{h=1}^{2}\left((x_h)^n-1\right)=\left(\varepsilon^n-1\right)\left(\left(\overline{\varepsilon}\right)^n-1\right)=\left(\varepsilon\overline{\varepsilon}\right)^n-(\varepsilon)^n-\left(\overline{\varepsilon}\right)^n+1=$

$=\begin{cases}0,\ n=3\ell\\3,\ n=3\ell\pm1\end{cases}$, $\ell\in\mathbb{N}^*$ şi, în final, cu (2) şi (3) în (1), obţinem identitatea dorită.

Cuprins

1. Argument 3

2. Introducere.. 4

3. Motivaţia 5

4. Determinanţi micşti 8

5. Polinomul caracteristic al unei matrice în raport cu altă matrice 41

6. Matrice K-diferite 56

7. Probleme 68

8. Soluţii 111

9. Bibliografie 223